Mettre le monde en équations, de nos jours au XVIe siècle.

9 octobre 2008

Giovanna Cifoletti EHESS

UNDER CONSTRUCTION – DO NOT CIRCULATE

De nos jours, le calcul algébrique apparaît comme une manière naturelle de représenter les phénomènes. On pourrait dire que le programme de George Boole (1854) de compréhension algébrique des lois de la pensée s'est réalisé : non seulement les ordinateurs ont été construit pour suivre cette logique, mais dès le collège, la traduction en algèbre est présentée comme la façon de la plus rapide et claire de procéder pour parvenir a' la résolution d'un problème. Cette traduction et la confiance en son efficacité ne vont pas de soi, mais sont le résultat d'un processus duré plusieurs siècles. Les mathématiciens français du XVIe siècle ont participé à ce processus. La recherche au niveau de la notation, de la généralisation des solutions et de leur réduction en procédure fut, chez ces auteurs, accompagnée de nombreux débats sur la langue, l'écriture, la pertinence des mathématiques dans la compréhension du monde, le progrès des connaissances humaines et ses limites. Ces réflexions sont d'autant plus d'actualité qu'elles ont contribué à établir l'algèbre symbolique dans la culture Occidentale. Nous reprendrons quelques exemples de ces débats, en procédant à rebours, de notre monde informatisé à celui des algébristes et cosmographes du XVIe siècle.

1. Un exemple du XXème siècle, les catégories et les topos

Partons d'un sujet contemporain. Un groupe de mathématiciens du XXe siècle a manifesté une grande conscience des difficultés inhérentes à un usage irréfléchi de l'algèbre. Cela intervenait lors de la réforme des « nouvelles mathématiques » (new Maths, mathématiques modernes à la Bourbaki). Face à une vision des mathématiques centrée sur la notion de structure algébrique, à son tour fondé sur la théorie des ensembles, ces mathématiciens ont rappelé à l'ordre leurs collègues : il est vrai que les mathématiques ont besoin d'être sures de leurs fondements, que leurs axiomes soient cohérents, mais de cette manière on peut construire beaucoup de mondes mathématiquement valables et qui n'ont aucun sens pour nous les êtres humains vivant dans ce monde.

En effet, les « nouvelles mathématiques » avaient été une réponse mure et encyclopédique à la crise des fondements des mathématiques. Entre le XIXe et le XXe siècle on s'était aperçus de l'écart entre les mathématiques possibles et les mathématiques qui gardaient un lien avec ce que l’on peut appeler la réalité. Le simple usage de la logique et des manipulations algébriques pouvait aboutir à une sorte de vide, l’objet n’était plus identifiable par des propriétés claires au delà de sa définition formelle. Par exemple, en topologie on s’était habitués à des définitions tellement abstraites et formelles des fonctions que l’on ne pouvait pas construire les courbes correspondantes. Le comble de cette situation est que l’on devient victime de l’outil que nous avons choisi. Cela arrive en particulier en développant les mathématiques des fonctions au delà des fonctions « lisses ». Ces dernières sont des fonctions maîtrisables, dont la courbe est bien analysable, c’est-à-dire indéfiniment différentiables. Ce sont les courbes que l’on étudie normalement en analyse, en fait les seules qu’étudiait par exemple Lagrange dans ses célèbres ouvrages. Ce qui plus compte pour nous aujourd’hui, ce sont en fait les seules courbes utiles à l’étude du monde, de la matière en mouvement. Les mathématiciens dont je parle critiquaient les mathématiques Je dis que l’on peut devenir victime de notre outil au sens où les choses, les objets peuvent paraître très complexes à cause de l’outil et non pas de l’objet : ce qui paraît complexe selon la théorie des ensembles peut être décrit de manière simple dans un autre contexte. C’est justement le cas avec les catégories. En particulier, la mécanique des fluides, qui a posé beaucoup de problèmes aux mathématiciens et qui reste un domaine de recherche avancée, peut être traité de manière plus directe dans les catégories adéquate. C’est ce que définit un topos.

C’est un des cas où reformuler le problème permet de le résoudre.

Ce point de vue a été développé par plusieurs mathématiciens, suivant les idée fondatrices de William Lawvere[1]. La conjoncture mathématique permettait de dépasser les fondements ensemblistes et strictement algébristes des mathématiques parce que l’on possédait désormais une nouvelle théorie, la théorie des catégories, qui avait vocation à donner aux mathématiques des fondements nouveaux. Il faut remarquer que la théorie des catégories n’est pas moins algébrique ou moins abstraite que la théorie des ensembles. En fait, on pourrait dire – et ses critiques l’ont dit – elle l’est davantage à plusieurs égards. Mais cela ne l’empêche d’identifier exactement la structure correspondante à un domaine particulier, donc à déterminer le bon niveau d’abstraction pour un analyser un aspect particulier de la matière en mouvement.

Ces mathématiciens proposèrent de faire usage de la notion généralisée de structure, la catégorie, et la notion généralisée de fonction, le foncteur, pour analyser les relations entre langage et modèle, entre une théorie et la classe de ses interprétations.

L’avantage de cette perspective par rapport à notre discussion a deux aspects :

---

[1] Une introduction synthétique à cet ensemble de questions se trouve dans W. Lawvere and S. H. Schanuel) *Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories*. Cambridge Uni. Press 1997.

D'une part, elle permet de mettre en évidence ce qui compte vraiment dans la procédure, la notion de fonction et de langue. Que la langue a une plasticité, c'est-à-dire la propriété d'acquérir la structure du monde. La bonne abstraction est justement la structure qui permet exactement les opération qu'il faut. Par exemple, il apparaît clair dans cette perspective que les modèles ne sont pas classiques mais intuitionnistes, avec plusieurs mondes possibles. Autrement dit, ce qui est vrai localement peut ne pas être vrai globalement.
En deuxième lieu, cette perspective permet de saisir l'essentiel, de ne pas mettre tout sur le même plan par rapport à ce qui est la connaissance du monde. Toutes les fonctions ne sont pas significatives : les non-lisses sont des chimères.

La réflexion de W. Lawvere a été reprise aussi dans le contexte de la psychologie cognitive. Une approche mathématique de la cognition peut faire usage de cette manière algébrique « adaptée »[2]. Il s'agit du fondement de la langue et de la cognition, du développement cognitif et linguistique, enfin de la formalisation de ces enquêtes. L'enjeu est, encore une fois, de trouver le bon niveau d'abstraction : bon des deux cotés, de celui du sujet connaissant et de celui de l'objet connu.

2. George Boole

En procédant à rebours, nous savons que les mathématiques modernes ont été développées pour contrer la crise des fondements : c'était la réponse à la fois aux paradoxes de la théorie des ensembles (trouvés par Russell) et aux problèmes des théories finies de Hilbert (elles ne peuvent pas être à la fois cohérentes et complètes).

L'encyclopédie de Bourbaki changea la manière de penser des mathématiciens avec sa réduction au langage et aux concepts algébriques de domaines qui étaient restés autonomes, comme la géométrie. Or, bien avant celle que l'on a appelé la crise des fondements en mathématiques il y avait eu un mouvement très répandu pour algébriser toutes les branches des mathématiques. Le nom le plus célèbre de ce mouvement est peut-être George Boole.

Il se forma sur Laplace et Lagrange, donc sur des mathématiques qui avaient beaucoup approfondi le domaine de l'analyse. Il était spécialistes d'équations différentielles. Il est l'auteur d'ouvrages fondamentaux :

- *The Mathematical Analysis of Logic (1847)*
- *An Investigation of the Laws of Thought, on Which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities (1854)*
- *Treatise of Differential Equations (1859)*

---

[2] William Lawvere *Kinship and Mathematical Categories*, **Language, Logic, and Conceptual Representation** (in memory of John Macnamara): 411-425, MIT Press 1999, Ed. P. Bloom, R. Jackendoff, and K. Wynn.

- *Treatise of the Calculus of Finite Differences* (1860)

Ici, nous devons retenir simplement qu'à cette époque il lança son programme d'algébrisation, c'est-à-dire de réduction explicite de l'activité mentale en opération algébrique.

Pendant le XVII et le XVIII siècles l'algèbre et l'analyse devinrent la partie la plus importante des mathématiques, et cela de fait, la plus grande partie de la production et de l'enseignement des mathématiques les concernaient, et cela plus particulièrement sur le continent. Mais justement nous ne parlerons pas de cette partie du processus. En fait les géomètres faisaient de l'analyse, mais toujours avec la préoccupation de traiter du monde réel. Qu'il suffise de feuilleter des pages des Mémoires de l'Académie des Sciences.

Seul point en suspens : les fondements du calcul infinitésimal. Et effet les infinitésimaux devaient être traité dans les calculs parfois comme des zéros et parfois comme des quantités. Mais tout le monde s'y résignait et surtout l'analyse de beaucoup de phénomènes prospérait, de Newton à Laplace.

Bien entendu, Newton argumentait géométriquement ses démonstrations reliant les la physique des cieux et la physique de la Terre. Il faut penser qu'il faisait cela non seulement parce qu'il maîtrisait parfaitement les classiques tels qu'Apollonius et ses triangles semblables, c'est-à-dire pour un rassurant goût de la tradition. Sa priorité était d'assurer le lien avec le monde, que la géométrie classique garantissait. Il faut remarquer que Newton et quelques-uns de ses contemporains étaient particulièrement sensibles à cette question à cause de la renaissance du Pythagorisme : voir les mathématiques comme la clé de l'univers ou la langue dans laquelle le monde a été écrit par Dieu, c'est bien. Mais il fallait bien faire les choses : il fallait surtout éviter de tomber dans le piège des Pythagoriciens, qui s'étaient retrouvés avec un monde de nombres irrationnels. A part les difficultés techniques que cela comportait, là aussi il s'agissait d'un problème de perfection théologique : il n'était pas question que l'irrationnel soit le chiffre du réel créé.

Revenons plutôt aux fondateurs : Descartes et les algébristes du XVI siècle.

3. Descartes

Il s'agit de l'auteur qui a pris le plus au sérieux les propositions des algébristes du XVIe siècle : il a affirme' plus que n'importe qui d'autre les possibilités de l'algèbre dans tous les domaines de la philosophie naturelle. En effet, jusqu'à un siecle avant Descartes il n'y avait pas de raison majeure pour croire que les équations pouvaient dire le dernier mot sur la nature. Les équations étaient surtout, aus moins jusqu'au début du XVIe siècle, des traductions en notation

conventionnelle pour faire plus rapidement les calculs compliquées de l'astronomie et du commerce. Mais Descartes osa affirmer que la bonne forme de toute question est l'équation. L'équation était pour lui l'intelligibilité même. De plus, il perfectionna la théorie des équations, établit la géométrie analytique qui associait une courbe à chaque équations. De cette façon, il rendait palpable la réalité des solutions des problèmes : il s'agissait de points sur une courbe et non pas seulement de valeurs d'une variable. Pur compléter l'œuvre, il appela ce nouveau domaine « La Géométrie ».
Ce qui nous surprend dans cette dénomination est qu'il y a très peu de géométrie classique qui apparaît évidente dans son texte, bien qu'elle soit présupposée. Mais pour les contemporains de Descartes c'était aussi une surprise et un coup de théâtre.
Comment on en été arrivé là ?

Quelques précisions techniques

En quoi consiste l'algèbre symbolique mise au point par les fondateurs de l'Occident Latin ? Voic les éléments principaux qui firent d'un art d'au moins 600 ans un nouvelle discipline :
1)D'abord, une notation pour les inconnues, mais aussi pour les coefficients et les termes connus.
2)Ensuite, une mise en forme de l'équation, de manière que les différentes formes soient comparable et de fait comparées en une sorte de début de théorie des équations.
3)En troisième lieu, un traitement assez uniforme des équations à plusieurs inconnues. Ceci est la véritable innovation des algébristes du XVIe siècle.
4)La solution des équations du 3^{e} degré irréductible, c'est-à-dire de la forme qui n'inclut pas le troisième degré, et du quatrième degré non général.
Plusieurs algébristes négligèrent le point 4 et se consacrèrent au perfectionnement des autres points.

Les algébristes du XVIe siècle

Avant Descartes l'algebre s'etait deja beaucoup transformee. Il y avait eu notamment Cardano, Tartaglia, Bombelli, Nunes mais surtout les algébristes français. Jacques Peletier du Mans, Guillaume Gosselin, Viète.
Jacques Peletier du Mans lanca le projet de l'usage de l'algebre pour resoudre tout probleme. Il affirma que l'algebre est capable de maitriser les problemes insolubles par l'arithmetique, la geometrie et les arts mathematiques qui en dependent : d'abord l'arithmetique commerciale, mais aussi l'astronomie, la cosmographie, l'art de la navigation, l'architecture et l'optique.

L’outil théorique de cette transformation fut l’émergence de l’équation, ce qui eut lieu dans la mise en forme de traités d’algèbre, grâce à l’étude systématique des « cas » du second degré et de la transformation des problèmes en équations. Le XVIIe siècle poursuivit ce programme: désormais, les problèmes furent effectivement considérés comme résolubles s’ils pouvaient prendre la forme d’une équation et un mathématicien fut considéré bon s’il savait transformer un problème en équation, et les frontières des mathématiques furent définies en fonction de leur réductibilité à l’algèbre, avec d’importantes conséquences en mathematiques et dans la division du travail mathématique.

A partir de Jacques Peletier, les algebristes francais developperent une theorie des equations en liaison avec la dialectique. En bons professeurs de logique et de rhetorique, ils consideraient que l’algebre pouvait devenir un art de penser a condition d’apprendre a traduire tout probleme en equation, Ensuite, la manipulation algebrique et les operations permettent de parvenir a la solution du probleme. Autrement dit, ces mathematiciens reconstruisent l’algebre en tant qu’invention dans le sens rhetorique et dialectique du terme : l’art de decouvrir. Cela etait surprenant puisque l’algebre avait ete’ diffusee au Moyen Age Latin comme une partie de l’arithmetique commerciale.

Cette transformation fut faite avec la conscience precise que traduire tout probleme en equation etait un projet qui comportait une reforme linguistique. Jacques Peletier, par exemple, etait un reformateur de la langue francaise, promoteur de la publication de livres scientifiques en francais et d’une nouvelle orthographe francaise. En outre, tous les algebristes francais du XVI siecle parteciperent a la reforme de la notation algebrique.

Parallelement, ces algebristes construisaient une histoire des mathematiques et de l’algebre.

En somme, un groupe d’algebristes avent Descartes traitaient explicitement de la mathesis et associaient directement la mathesis a’ la langue dans sa dimension historique.

Par exemple, dans son Arithmetique de 1548 Peletier affirme que la specificite d’un peuple devient manifeste dans sa langue. Si une technique se developpe au sein d’une population, elle ne restera pas longtemps sans le vocabulaire necessaire. Voici pourquoi le Latin contient autant de termes juridiques, le Grec des termes de philosophie etc.

Conclusion

L’algèbre apparaît de nos jours comme une manière naturelle de représenter le monde.

L’algèbre n’est pas tellement née comme une manière de représenter le monde, mais comme une manière de traiter les données numériques concernant les phénomènes. Les grands fondateurs de l’algèbre à l’époque classique de Baghdad, au IX siècle, Al Kwarizmi et Ibn Qurra, ensuite Al

Khayyam, étaient des astronomes mais aussi des théoriciens des pratiques commerciales. Ils étaient à la recherche de méthodes qui puissent être appliquées largement, des calculs astronomiques aux calculs d'intérêt et à la métrique poétique.
Comme pour les Persans et les Arabes de Baghdad, pour nous aussi les équations donnent une forme aux questions que nous nous posons sur le monde.
Est-que les structures algébriques, c'est à dire les ensembles avec opérations ou les catégories et leurs foncteurs permettent de traiter des choses dans le monde ? La réponse est oui.
Est-ce que les opérations qui font l'intérêt de l'algèbre, parce qu'elles permettent de trouver une solution grâce à une suite finie de manipulations, sont des opérations entre les choses dans le monde? La réponse est NON.
Donc il y a une double abstraction, à partir des choses et à partir des opérations. Les opérations ne sont pas vues entre les choses, mais plutôt entre grandeurs auxquelles sont associées des quantités variables, mais aussi les opérations sont traduites en des opérations qui se comportent comme les premières.
Cette idée apparaît avec la notion d'interprétation de Tarski. Mais la théorie des topos de Lawvere exprime mathématiquement ou plutôt dans une algèbre généralisée la connaissance elle-même, c'est-à-dire la relation entre le langage et la classe de ses interprétations. Pour étudier ce processus, le foncteur interprétation se montre la meilleure abstraction : les opérations qu'il sait traduire sont celles que nous connaissons, celles que Descartes définit dans sa Géométrie en 1637.
La **chose** la plus importante qui devient à son tour l'**abstraction** la plus importante est la **relation que nous introduisons entre deux catégories, la catégorie des théories et la catégorie des mondes possibles (ses modeles).**
C'est a dire, avec la theorie des categories on a generalise et donne' une forme mathematique a ce qui est une pratique commune : penser que par notre langage nous construisons une theorie dont la structure algebrique est la meme que celle du monde dont nous parlons. Ces categories, les topos, ont alors une logique intuitionniste, celle qui a ete' mise au point justement pour garder le maximum de lien entre la construction mentale et la construction mathematique.
En revanche la logique classique, qui est aussi la logique booleenne, construit des monstres, c'est a dire les fonctions que nous ne maitrisons pas et que de toute maniere n'existent pas dans le monde.
Cette conclusion concerne les mathematiques contemporaines, mais elle pose plusieurs points communs avec les theses des algebristes francais avant Descartes. L'algebre est langage. Le langage parle du monde, mais en tant que monde humain, ne serait-ce qu'à cause des origines commerciales de l'algebre. Toutefois, cela n'empeche pas les humains de relever le defi de parler du monde.